



Hamburg

Behörde für Schule,
Familie und Berufsbildung

Name

Kurs-Nr.

Schriftliche Abiturprüfung Schuljahr 2025/2026

MMS Mathematik auf erhöhtem Anforderungsniveau an allgemeinbildenden gymnasialen Oberstufen

Haupttermin
Mittwoch, 6. Mai 2026, 9:00 Uhr

Unterlagen für die Prüflinge
Wahlschwerpunkt Lineare Algebra

Allgemeine Arbeitshinweise

- Überprüfen Sie diese Unterlagen auf Vollständigkeit.
- Schreiben Sie auf alle Prüfungsunterlagen Ihren Namen und zusätzlich auf dieses Deckblatt Ihre Kursnummer.
- Kennzeichnen Sie bitte Ihre Entwurfsblätter (Kladde) und Ihre Reinschrift.

Fachspezifische Arbeitshinweise¹

- Die Arbeitszeit einschließlich der Auswahlzeit beträgt insgesamt **330 Minuten**.
- Eine gesonderte Lese- oder Auswahlzeit wird nicht gewährt.
- Aufgabe I (Prüfungsteil A) ist zunächst **ohne Hilfsmittel** zu bearbeiten.
Die Bearbeitungszeit dafür beträgt **höchstens 110 Minuten**.
Danach geben Sie Aufgabe I und die zugehörigen Lösungen ab und erhalten die zugelassenen Hilfsmittel.
- Sie entscheiden selbst, zu welchem Zeitpunkt innerhalb der ersten 110 Minuten Sie Aufgabe I abgeben und die Hilfsmittel erhalten.
- Anschließend bearbeiten Sie die Aufgaben des **Prüfungsteils B** in der verbleibenden Arbeitszeit.
- Hilfsmittel: MMS-System, zugelassene Formelsammlung, Rechtschreibwörterbuch

¹ Entsprechend der "Richtlinie über die Gewährung von Erleichterungen für neu zugewanderte Schülerinnen, Schüler und Prüflinge bei Sprachschwierigkeiten in der deutschen Sprache" (MBISchul Nr. 08, 7. Oktober 2016, S. 60) werden für die betroffenen Prüflinge die folgenden Erleichterungen gewährt:

- Die Bearbeitungszeit wird um 30 Minuten auf **360 Minuten** erhöht.
- Ein nicht-elektronisches Wörterbuch Deutsch – Herkunftssprache / Herkunftssprache – Deutsch wird bereitgestellt.

Aufgabenauswahl

- Sie erhalten **fünf Aufgaben**:
 - Prüfungsteil A**: Aufgabe I (hilfsmittelfreier Teil)
 - Prüfungsteil B**: Aufgaben II.1 (Analysis 1), II.2 (Analysis 2), III (Lineare Algebra) und IV (Stochastik)
- In Aufgabe I wählen Sie aus den Unteraufgaben **I.5.1, I.5.2, I.5.3, I.5.4, I.5.5** und **I.5.6** **zwei** Unteraufgaben aus. Die Unteraufgaben **I.1, I.2, I.3** und **I.4** müssen bearbeitet werden, insgesamt also **sechs** Unteraufgaben von Aufgabe I.
- Nach Abgabe der Aufgabe I und der zugehörigen Lösungen erhalten Sie Ihr MMS-System und die Formelsammlung.
- Wählen Sie **eine** der Aufgaben **II.1** und **II.2** zur Bearbeitung aus.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben **II.1** oder **II.2, III** und **IV**, also **drei** Aufgaben in der restlichen Arbeitszeit.
- Vermerken Sie hier auf dem Deckblatt und der Reinschrift, welche zwei Unteraufgaben von I (**I.5.1, I.5.2, I.5.3, I.5.4, I.5.5** und **I.5.6**) und welche Aufgabe von II (**II.1** oder **II.2**) Sie bearbeitet haben.

Ausgewählt wurden (2 von 6) :

I.5.1	I.5.2	I.5.3	I.5.4	I.5.5	I.5.6

Ausgewählt wurde (1 von 2):

II.1	II.2

Bewertung

Prüfungsteil A (hilfsmittelfreier Teil): 30 Bewertungseinheiten (BE)

Prüfungsteil B: 70 BE (3 komplexe Aufgaben, Aufgabe II.1 oder II.2 mit 30 BE, Aufgabe III mit 20 BE und Aufgabe IV mit 20 BE)

Insgesamt sind 100 BE erreichbar. Es dürfen auch halbe Bewertungseinheiten vergeben werden.

Bei der Festlegung von Notenpunkten gilt die folgende Tabelle.

Noten- punkte	mindestens zu erreichender Anteil an den insgesamt zu erreichenden Bewertungseinheiten	erreichte Bewertung- seinheiten
15	95 %	95–100
14	90 %	90–94,5
13	85 %	85–89,5
12	80 %	80–84,5
11	75 %	75–79,5
10	70 %	70–74,5
9	65 %	65–69,5
8	60 %	60–64,5

Noten- punkte	mindestens zu erreichender Anteil an den insgesamt zu erreichenden Bewertungseinheiten	erreichte Bewertung- seinheiten
7	55 %	55–59,5
6	50 %	50–54,5
5	45 %	45–49,5
4	40 %	40–44,5
3	33 %	33–39,5
2	27 %	27–32,5
1	20 %	20–26,5
0	0 %	0–19,5

Schwerwiegende und gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem Abzug von bis zu zwei Notenpunkten in einfacher Wertung. Mangelhafte Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen oder unzureichende oder falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text sind als fachliche Fehler zu werten. Ein Abzug für Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit soll nicht erfolgen, wenn diese bereits Gegenstand der fachspezifischen Bewertungsvorgaben sind.

Bei der Bearbeitung des Prüfungsteils B müssen die Lösungswege sorgfältig dokumentiert werden.

Aufgabe I: Hilfsmittelfreier Prüfungsteil

I.1 Analysis

Für eine Zahl $k > 0$ sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und g mit

$$f(x) = 2e^{k \cdot x}$$

und

$$g(x) = 2e^{-k \cdot x}$$

gegeben.

a) **Geben** Sie **an**, wie der Graph von f aus dem Graphen von g erzeugt werden kann. (1 BE)

b) Die Graphen von f und g schneiden sich senkrecht.

Bestimmen Sie k . (4 BE)

I.2 Analysis

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit

$$g(x) = -2x + 4.$$

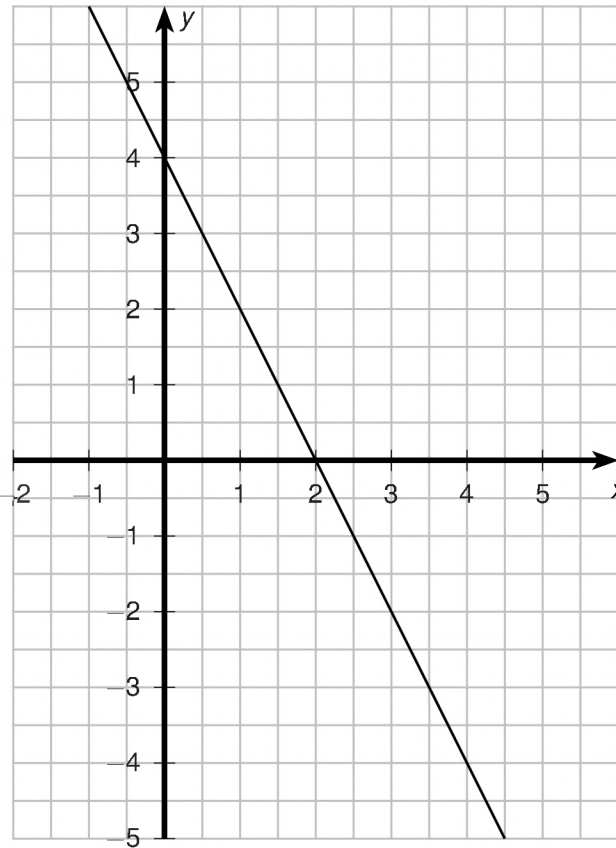


Abbildung 1

- a) Es gibt eine positive reelle Zahl k , die Lösung der Gleichung

$$\int_0^k g(x) \, dx = 0$$

ist.

Veranschaulichen Sie in der Abbildung 1 für diese Zahl k die geometrische Bedeutung der Gleichung.

(2 BE)

- b) **Bestimmen** Sie alle Stammfunktionen von g , die ausschließlich negative Funktionswerte haben.

(3 BE)

I.3 Lineare Algebra

Betrachtet wird die Entwicklung einer Population von Insekten. Diese Entwicklung vollzieht sich in drei

Stadien. Die Verteilung der Insekten auf die drei Stadien kann durch Vektoren $\vec{v}_n$ der Form $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ mit $n \in \mathbb{N}$

dargestellt werden. Dabei ist A die Anzahl der Insekten im ersten Stadium, B die Anzahl der Insekten im zweiten Stadium und C die Anzahl der Insekten im dritten Stadium. Die Entwicklung der Population von einem Tag zum nächsten lässt sich modellhaft durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \end{pmatrix}$$

mit der reellen Zahl r und die Gleichung

$$\vec{v}_{n+1} = M \cdot \vec{v}_n$$

beschreiben, wobei $\vec{v}_0 \neq \vec{0}$ die Verteilung der Insekten auf die drei Stadien zu Beobachtungsbeginn angibt.

a) Begründen Sie, dass das abgebildete Übergangsdiagramm (siehe Abbildung 2) fehlerhaft ist.

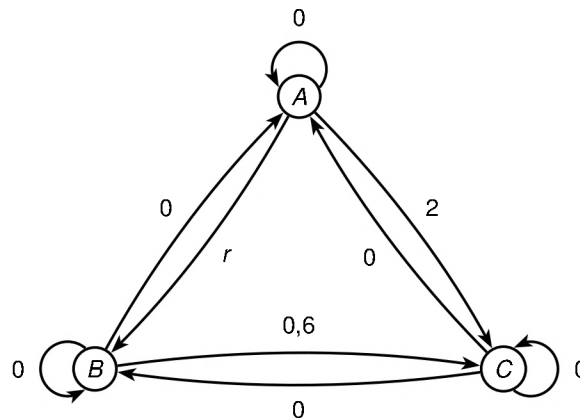


Abbildung 2

(1 BE)

b) Nach drei Tagen stimmt die Verteilung der Insekten auf die drei Stadien mit der Verteilung der Insekten auf die drei Stadien zu Beobachtungsbeginn überein.

Bestimmen Sie r .

(4 BE)

I.4 Stochastik

Betrachtet wird die binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern $n = 36$ und $p = 0,5$.

a) **Geben** Sie einen Term **an**, mit dem die Wahrscheinlichkeit $P(X = 27)$ berechnet werden kann.

(1 BE)

b) Die Abbildung 3 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X .

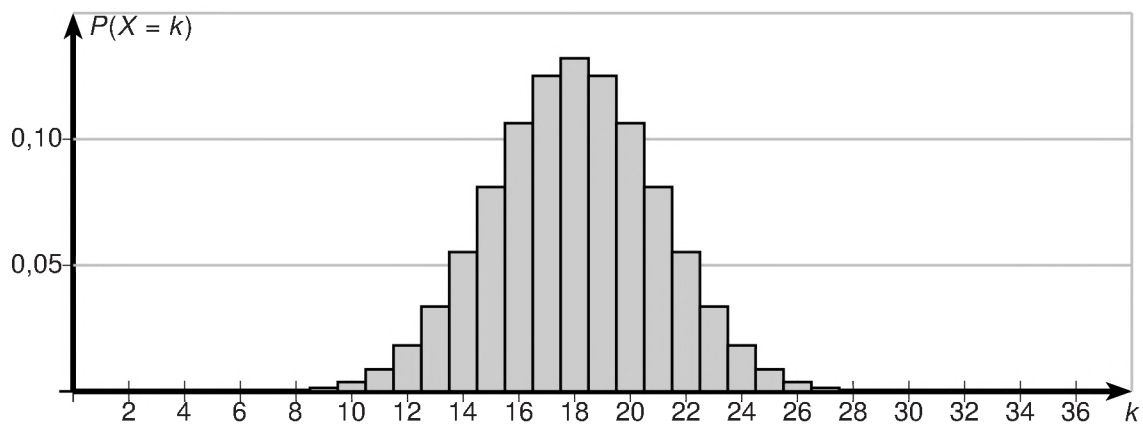


Abbildung 3

Ermitteln Sie einen Näherungswert für $P(\mu - 0,5 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 0,5 \cdot \sigma)$, wobei μ der Erwartungswert und σ die Standardabweichung von X sind.

(4 BE)

I.5.1 Analysis

Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit der Wertemenge $[-3; 2]$. Ein möglicher Graph einer solchen Funktion ist in Abbildung 4 dargestellt.

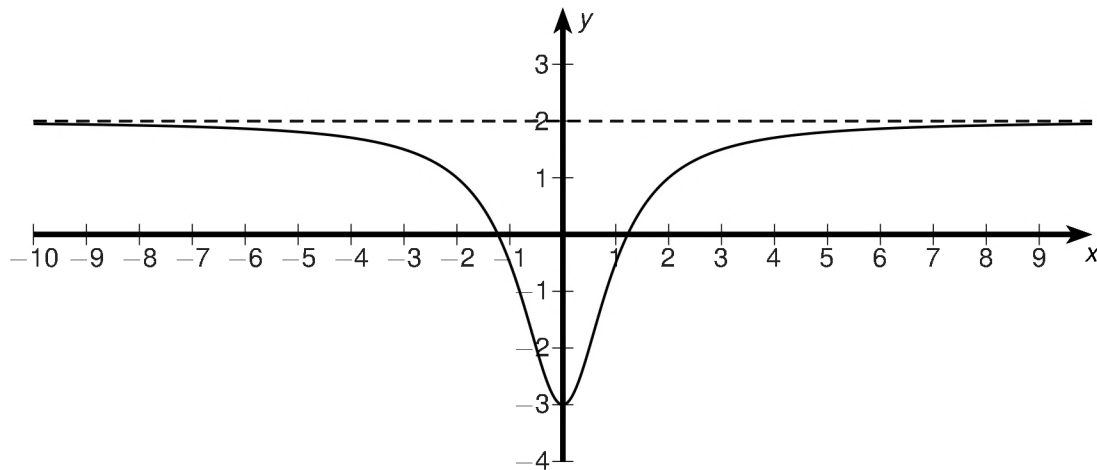


Abbildung 4

a) **Begründen** Sie, dass der Graph von f aufgrund der gegebenen Wertemenge nicht symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs sein kann. (1 BE)

b) Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit

$$h(x) = -2 \cdot f(x - 5) + 1.$$

Geben Sie die Wertemenge von h an und **begründen** Sie Ihre Angabe. (4 BE)

I.5.2 Analysis

Die Abbildung 5 zeigt den bezüglich des Koordinatenursprungs symmetrischen Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f .

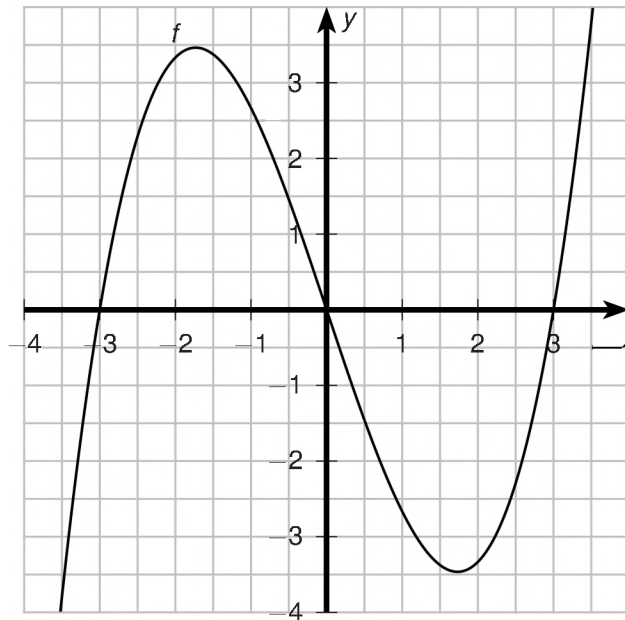


Abbildung 5

Für jede reelle Zahl a wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h_a mit

$$h_a(x) = f(x) + a \cdot x$$

betrachtet.

Der Graph der ersten Ableitungsfunktion h'_a von h_a ist für jeden Wert von a eine Parabel, deren Scheitelpunkt auf der y -Achse liegt. Es gibt genau einen Wert von a , für den der Graph von h_a genau eine waagerechte Tangente besitzt. Dieser Wert ist ganzzahlig.

Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung 5 diesen Wert von a .

(5 BE)

I.5.3 Lineare Algebra

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Für eine reelle Zahl a und den Vektor

$$\vec{v}_a = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt

$$A \cdot \vec{v}_a = 4 \cdot \vec{v}_a.$$

a) **Bestimmen** Sie a .

(2 BE)

b) Für jede reelle Zahl c gibt es eine reelle Zahl b , sodass

$$A^{-1} \cdot (b \cdot \vec{v}_a) = c \cdot \vec{v}_a$$

gilt.

Hierbei bezeichnet A^{-1} die inverse Matrix zu A .

Bestimmen Sie b in Abhängigkeit von c , ohne die Matrix A^{-1} zu berechnen.

(3 BE)

I.5.4 Lineare Algebra

Für jede Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ heißt die Matrix

$$M^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

transponierte Matrix von M . Eine Matrix M heißt orthogonal, wenn

$$M \cdot M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt.

- a) **Geben** Sie eine orthogonale Matrix der Form M mit $a, b, c, d \in \{0; 1\}$ **an**, die sich von der Einheitsmatrix unterscheidet. (1 BE)

- b) **Beurteilen** Sie die folgende Aussage:

Es gibt orthogonale Matrizen der Form M mit

$$a = d = \frac{1}{3}\sqrt{5},$$

die ungleich sind.

(4 BE)

I.5.5 Stochastik

Die Abbildung zeigt die Netze zweier Würfel A und B.

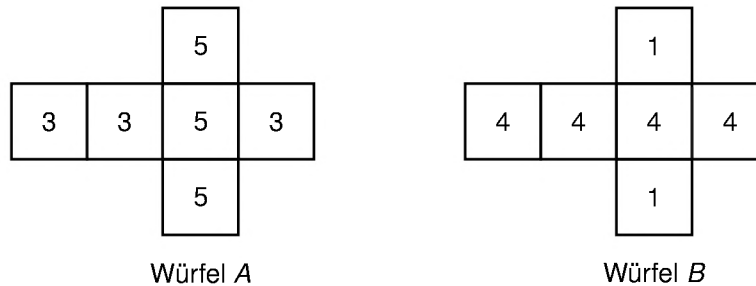


Abbildung 6

Bei einem Spiel wird pro Runde jeder der beiden Würfel einmal geworfen.

- a) Es werden zwei Runden gespielt.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei beiden Runden mit Würfel A eine größere Zahl erzielt wird als mit Würfel B. (3 BE)

- b) Nun werden vier Runden gespielt. Für jede Runde wird die Summe der beiden erzielten Zahlen berechnet. Betrachtet wird das Ereignis "Alle vier Summen sind untereinander verschieden."

Geben Sie jeweils eine natürliche Zahl für v und w an, sodass mit dem Term

$$v \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^w \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses berechnet werden kann. (2 BE)

I.5.6 Stochastik

In einem Behälter befinden sich fünf Kugeln, die jeweils mit einer natürlichen Zahl beschriftet sind.

Auf drei der Kugeln steht die Zahl a , auf den beiden anderen Kugeln die Zahl b .

Die Summe von a und b ist 17.

Es werden zwei Kugeln gleichzeitig zufällig entnommen.

- a) **Geben** Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term

$$1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$$

berechnet werden kann.

(1 BE)

- b) Die Zufallsgröße X beschreibt die Summe der Zahlen auf den beiden entnommenen Kugeln. Der Erwartungswert von X ist 16.

Bestimmen Sie a und b .

(4 BE)

Aufgabe II.1: Analysis 1

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit

$$f_a(x) = \frac{60}{a} \cdot x \cdot (x - a)^2$$

und $a \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.

- a) **Begründen** Sie mithilfe des Funktionsterms von f_a , dass G_a die x -Achse nur in den Punkten $A(0|0)$ und $B(a|0)$ schneidet.

Zeigen Sie, dass die Steigung von G_a im Punkt A dem 60-fachen Wert von a entspricht und dass die x -Achse die Tangente an G_a im Punkt B ist. (4 BE)

- b) Für jeden Wert von a schließt G_a mit der x -Achse eine Fläche ein.

Berechnen Sie den Wert von a , für den der Inhalt dieser Fläche 10 beträgt. (3 BE)

- c) Es gibt einen Wert von a , für den der Wendepunkt von G_a auf der Gerade mit der Gleichung $y = x$ liegt.

Berechnen Sie diesen Wert von a . (4 BE)

- d) Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion w_a mit

$$w_a(x) = \frac{11}{10} \cdot f_a\left(\frac{11}{10} \cdot (12 - x)\right)$$

kann schrittweise aus G_a erzeugt werden durch:

1. Streckung mit einem Faktor s_x in x -Richtung
2. Streckung mit einem Faktor s_y in y -Richtung
3. Spiegelung an der y -Achse
4. Verschiebung um 12 in positive x -Richtung

Betrachtet werden die auf G_a liegenden Punkte

$$A(0|0), B(a|0) \text{ und } C(x_C|f_a(x_C))$$

mit $0 < x_C < a$. Auf dem Graphen von w_a gibt es Punkte A' , B' und C' , die den Punkten A , B bzw. C gemäß der beschriebenen Beziehung der beiden Graphen entsprechen.

Geben Sie die Faktoren s_x und s_y **an** und **beurteilen** Sie folgende Aussage:

Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ haben den gleichen Flächeninhalt.

(5 BE)

An einem bestimmten Sommertag hat das Strandbad an einem Badensee von 9:00 Uhr bis 21:00 Uhr geöffnet. Außerhalb der Öffnungszeiten befindet sich kein Gast im Strandbad. Am betrachteten Tag wird die Anzahl der Gäste erfasst, die bis zu einem bestimmten Zeitpunkt das Strandbad betreten. Dabei wird vereinfachend angenommen, dass an diesem Tag jeder Gast genau einmal das Strandbad betritt. Die in $[0; 12]$ definierte Funktion g ist durch

$$g(x) = \begin{cases} f_{11}(x) & \text{für } 0 \leq x \leq 11 \\ 0 & \text{für } 11 < x \leq 12 \end{cases}$$

festgelegt. Die Funktion g beschreibt modellhaft die momentane Änderungsrate der erfassten Anzahl, die als Eingangsrate bezeichnet wird. Dabei ist x die seit 9:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $g(x)$ die Eingangsrate in der Einheit $\frac{1}{h}$.

e) Begründen Sie die folgende Aussage:

Das Modell steht in Einklang damit, dass bereits ab 20:00 Uhr kein Gast mehr eingelassen wird.

(2 BE)

f) Es gibt genau einen Zeitpunkt, zu dem die Eingangsrate ihren größten Wert annimmt.

Ermitteln Sie rechnerisch sowohl den Zeitpunkt als auch den Wert.

(4 BE)

Die Anzahl der Gäste, die an dem betrachteten Tag bis zu einem bestimmten Zeitpunkt das Strandbad verlassen, wird ebenfalls erfasst. Die momentane Änderungsrate dieser Anzahl (Ausgangsrate) wird durch die in $[0; 12]$ definierte Funktion h beschrieben. Dabei ist x die seit 9:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $h(x)$ die Ausgangsrate in der Einheit $1/h$. In der Abbildung 1 sind die Graphen von g und h dargestellt.

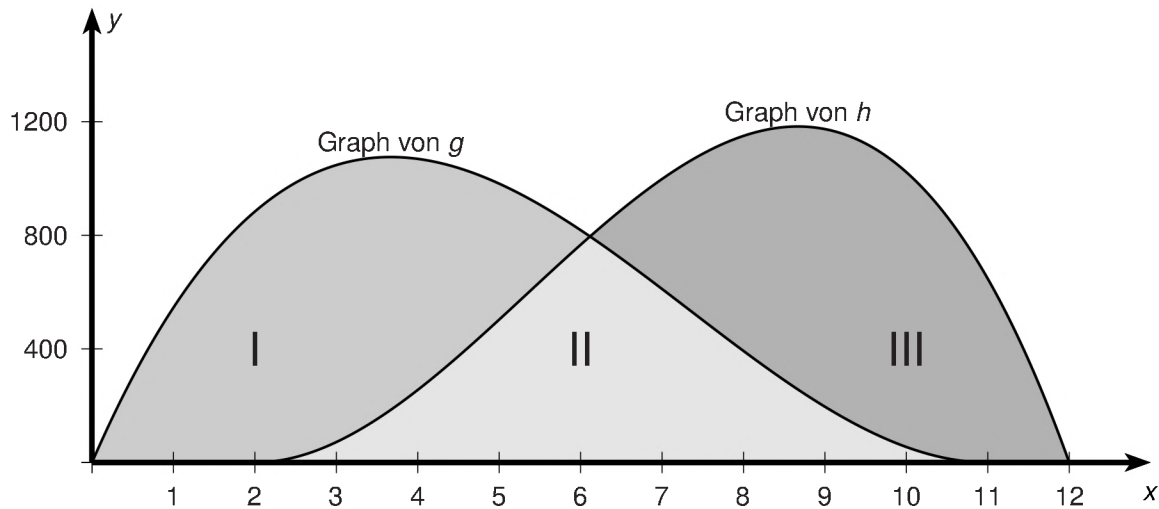


Abbildung 1

- g) Die beiden Graphen und die x -Achse schließen drei Flächen ein, die in der Abbildung mit I, II und III bezeichnet sind.

Erläutern Sie im Sachzusammenhang, dass die Inhalte der Flächen I und III gleich sind. (4 BE)

- h) Betrachtet wird zudem die in $[0; 12]$ definierte Funktion D mit

$$D(x) = \int_0^x (g(t) - h(t)) dt.$$

Im Bereich $2 \leq x \leq 11$ nimmt die Funktion D ihr Maximum an. In diesem Bereich schneiden sich die Graphen von g und h genau in einem Punkt, dessen x -Koordinate mit x_S bezeichnet wird.

Begründen Sie, dass das Maximum von D an der Stelle x_S angenommen wird, und **geben** Sie die Bedeutung des Maximums von D im Sachzusammenhang an. (4 BE)

Aufgabe II.2: Analysis 2

1. Ein moderner Deich an der Nordsee besteht aus einem Deichkern aus Sand, der von einer wasserdichten Kleischicht überlagert wird. Auf der Seeseite ist der Deich sehr flach, sodass Wellen langsam auslaufen und der Deich nicht so schnell beschädigt wird.

Der höchste Punkt des Deichs, die Deichkrone, muss eine Höhe von mindestens 10 m haben. In Abbildung 1 ist der Querschnitt des Deichs dargestellt. Die Deichkrone liegt bei $x = 0$.

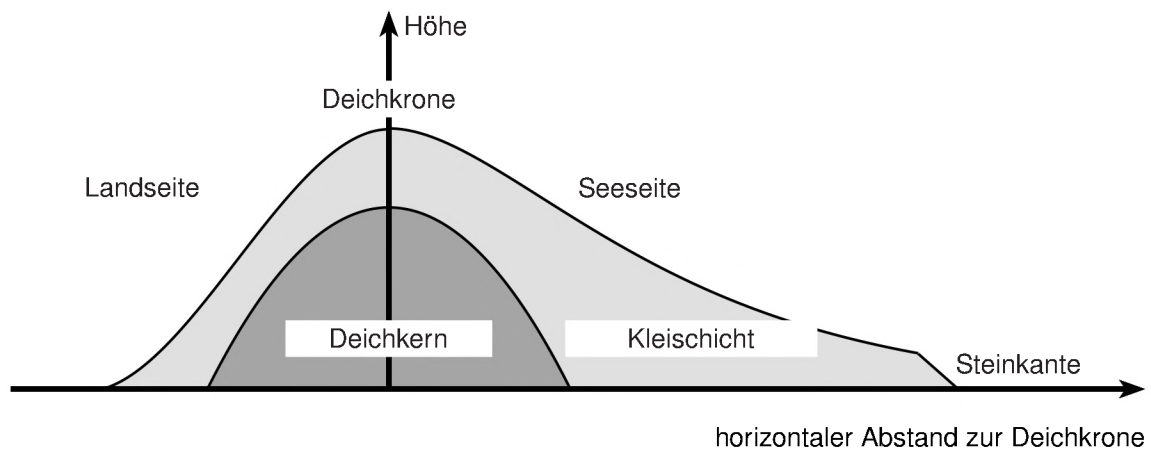


Abbildung 1

Das Profil auf der Seeseite lässt sich für $0 \leq x \leq 7$ durch die Funktion f mit

$$f(x) = 1,4(x+2) \cdot e^{-0,5(x+2)}$$

beschreiben. Hierbei gibt x den Abstand von der Deichkrone in Richtung See und $f(x)$ die Höhe des Deichs an (siehe Abbildung 2). Alle Längeneinheiten entsprechen 10 m.

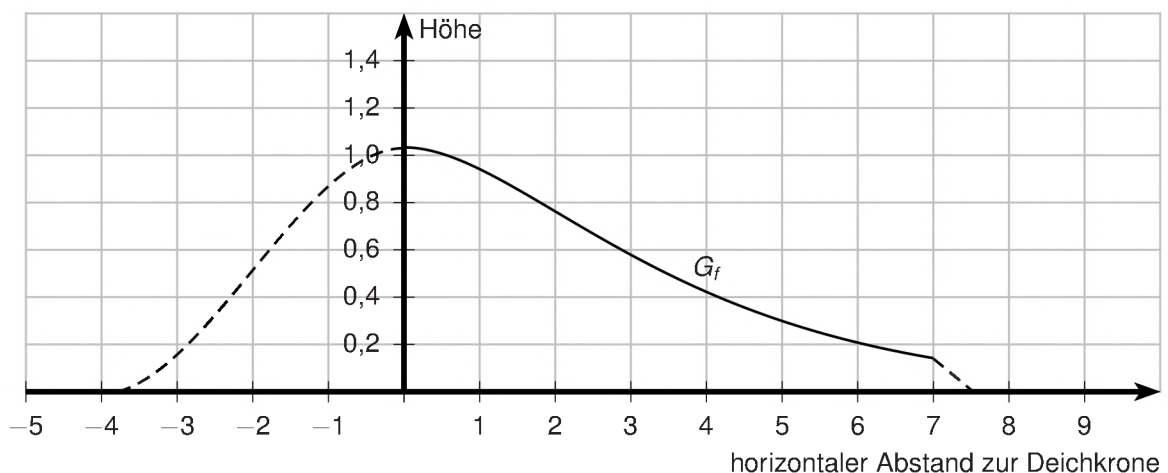


Abbildung 2

- a) **Bestätigen** Sie rechnerisch, dass

$$f'(x) = -0,7x \cdot e^{-0,5(x+2)}$$

gilt.

(2 BE)

b) **Berechnen** Sie, um wie viel Prozent die Höhe dieses Deichs die geforderte Mindesthöhe von 10 m übersteigt. (2 BE)

c) **Bestimmen** Sie die mittlere Steigung des Deichs auf der Seeseite im Intervall $[0; 7]$ in Prozent. (3 BE)

d) Die maximale Neigung zur Horizontalen darf auf der Seeseite 12° nicht überschreiten.
Untersuchen Sie, ob der Deich diese Vorgabe erfüllt. (3 BE)

e) Der Querschnitt des Deichkerns wird durch die quadratische Funktion q mit

$$q(x) = -0,125 \cdot (x + 2,4) (x - 2,4)$$

beschrieben (siehe Graph G_q in Abbildung 3).

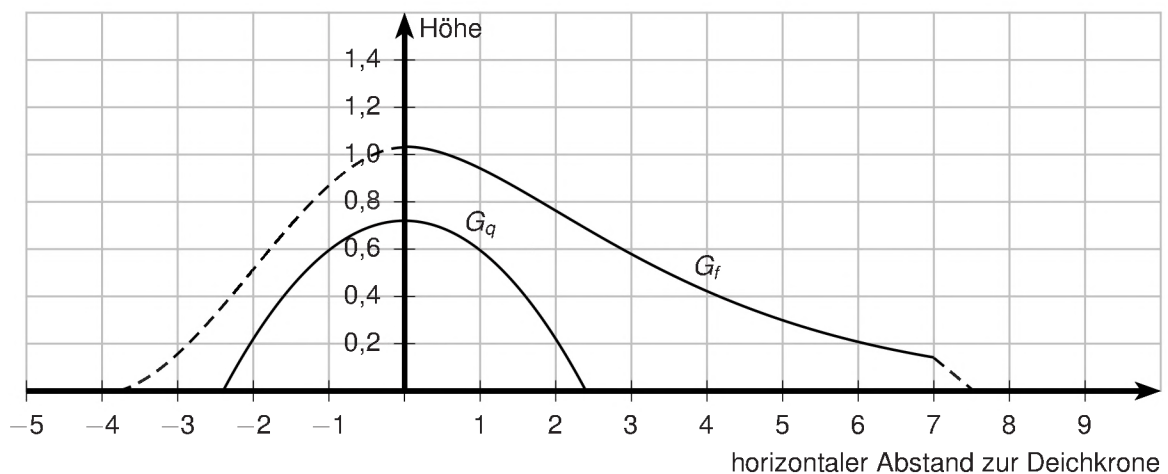


Abbildung 3

Der Deich ist 100 m lang.

Geben Sie einen Term **an**, mit dem das Volumen der Kleischicht auf der Seeseite, also im Intervall $[0; 7]$, für die gesamte Länge des Deichs in Kubikmeter berechnet werden kann. (3 BE)

Die Landseite des Deichs wird im Bereich $-4 \leq x \leq 0$ durch eine trigonometrische Funktion g beschrieben. Die Funktion g soll an der Deichkrone ($x = 0$) sprunfrei und knickfrei an die Seeseite, also an f , anschließen (siehe Graph G_g in Abbildung 4).

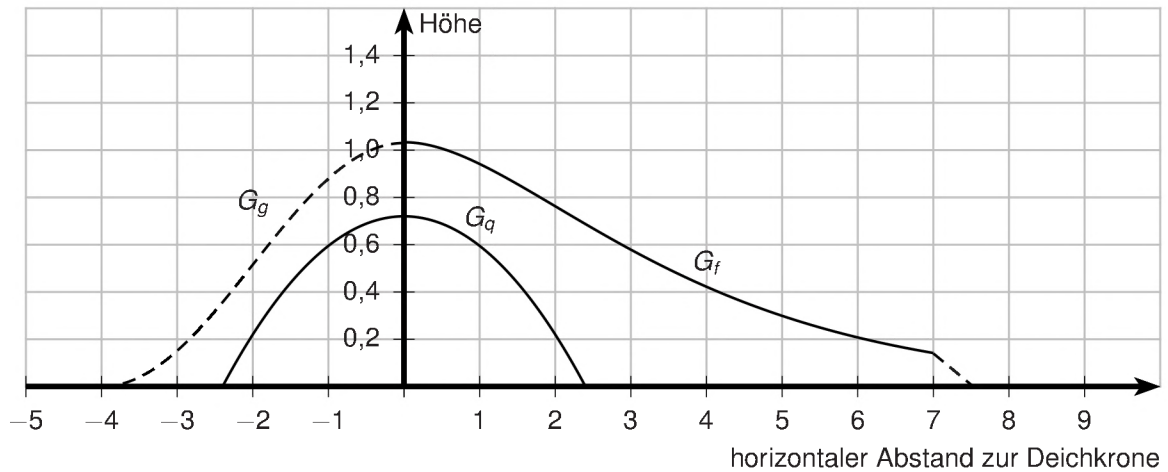


Abbildung 4

f) **Zeigen** Sie, dass die Funktion g mit

$$g(x) = 0,515 \cdot \cos\left(\frac{1}{4}\pi \cdot x\right) + 0,515$$

diese Bedingung näherungsweise erfüllt.

(3 BE)

g) **Bestimmen** Sie den Bereich auf der Landseite, in dem die Ausdehnung der Kleischicht in y -Richtung maximal 3 m beträgt.

(3 BE)

2. Gegeben ist die Funktionsschar $f_{a,k}$ mit

$$f_{a,k}(x) = ax \cdot e^{kx}, \quad a, k \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad k \neq 0.$$

Die Graphen dieser Funktionsschar haben jeweils einen Extrempunkt.

a) **Beschreiben** Sie den Einfluss des Parameters k auf das Verhalten der Funktion für $x \rightarrow \pm\infty$.

(3 BE)

b) **Bestimmen** Sie die Koordinaten des Extrempunktes der Funktion $f_{a,k}(x)$ in Abhängigkeit von a und k .

Entscheiden Sie **begründet**, für welche Werte von k es sich jeweils um einen Hochpunkt bzw. einen Tiefpunkt handelt.

(6 BE)

c) **Zeigen** Sie, dass alle Extrempunkte der Funktionsschar $f_{a,k}$ auf der Geraden t mit

$$t(x) = a \cdot e^{-1} \cdot x$$

liegen.

(2 BE)

Aufgabe III: Lineare Algebra

1. Der Bedarf an Rohstoffen für die erste Stufe des Fertigungsprozesses kann mithilfe der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden und der Bedarf an Zwischenprodukten für die zweite Stufe mithilfe der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Dabei geben die Einträge der Vektoren $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ die Anzahlen der Mengeneinheiten (ME) der drei Rohstoffe, der drei Zwischenprodukte bzw. der beiden Endprodukte an.

- a) Von den Endprodukten E_1 und E_2 soll jeweils eine Mengeneinheit gefertigt werden.

Bestimmen Sie für jedes der drei Zwischenprodukte und für den Rohstoff R_1 die benötigte Anzahl der Mengeneinheiten. (3 BE)

Das Ergebnis der Multiplikation

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

wird mit N bezeichnet.

- b) **Geben** Sie die Bedeutung der Matrix N im Sachzusammenhang an. (1 BE)

- c) Von jedem der drei Rohstoffe sind genau 1 298 ME vorhanden. Für einen Auftrag sollen doppelt so viele Mengeneinheiten des Endproduktes E_2 wie des Endproduktes E_1 gefertigt werden.

Ermitteln Sie für diesen Auftrag, wie viele Mengeneinheiten von E_2 mit den vorhandenen Rohstoffen maximal gefertigt werden können. (4 BE)

- d) Der folgenden Tabelle 1 können für die Rohstoffe die Anschaffungskosten pro Mengeneinheit in Geldeinheiten entnommen werden.

Rohstoff	R_1	R_2	R_3
Anschaffungskosten	5	6	7

Tabelle 1

Für jeden der drei Rohstoffe wird in den kommenden fünf Jahren von einem konstanten jährlichen prozentualen Anstieg der Anschaffungskosten ausgegangen. Für die Rohstoffe R_1 und R_2 beträgt dieser prozentuale Anstieg 3 % pro Jahr. Die Produktion des Endproduktes E_1 bleibt nur dann rentabel, wenn die gesamten Anschaffungskosten der Rohstoffe zur Fertigung von E_1 in den kommenden fünf Jahren um insgesamt höchstens 20 % ansteigen. Hierzu darf der jährliche prozentuale Anstieg der Anschaffungskosten für den Rohstoff R_3 nicht zu groß sein.

Bestimmen Sie den maximalen Wert dieses prozentualen Anstiegs pro Jahr. (5 BE)

2. Im Folgenden wird der Quader $ABCDEFGH$ betrachtet, der von den Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannt wird (siehe Abbildung 1).

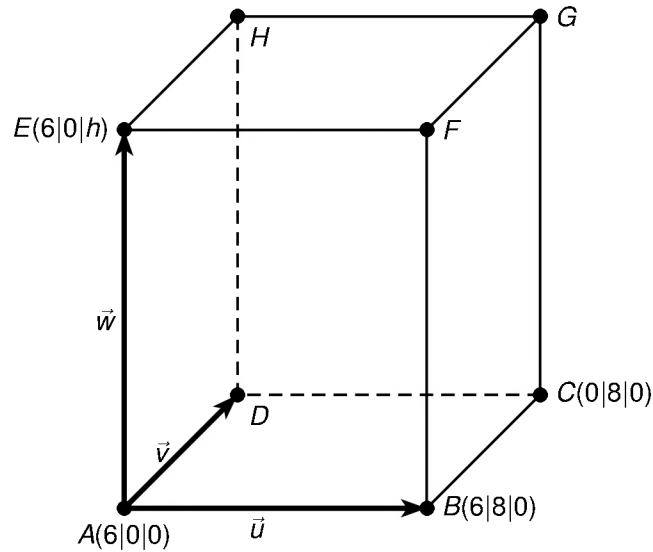


Abbildung 1

- a) Der Mittelpunkt der Kante $\overline{BC}$ wird mit M_1 bezeichnet und der Mittelpunkt der Kante $\overline{EF}$ mit M_2 .

Zeichnen Sie die Strecke $\overline{M_1 M_2}$ in die Abbildung 1 ein und **geben** Sie die reellen Zahlen r , s und t an, sodass

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$$

gilt.

(3 BE)

- b) Es gilt

$$A(6|0|0), B(6|8|0), C(0|8|0) \text{ und } E(6|0|h)$$

mit $h > 0$. Die Raumdiagonalen $\overline{AG}$ und $\overline{CE}$ des Quaders schneiden sich senkrecht.

Bestimmen Sie h und den Inhalt der Oberfläche des Quaders.

(4 BE)

Aufgabe IV: Stochastik

Eine Supermarktkette bietet für Personen, die bei ihr einkaufen, ein Treuepunktesystem an. Diese Personen werden im Folgenden als Kundenkreis bezeichnet. Beim Bezahlen an der Kasse erhält man auf Wunsch pro 5 € Warenwert einen Treuepunkt zum Aufkleben. 75 % der Personen aus dem Kundenkreis der Supermarktkette sammeln Treuepunkte.

1. Aus dem Kundenkreis werden 10 Personen zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße A beschreibt die Anzahl der ausgewählten Personen, die Treuepunkte sammeln. Es soll davon ausgegangen werden, dass A binomialverteilt ist.

a) **Ermitteln** Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als 8 der ausgewählten Personen Treuepunkte sammeln. (2 BE)

- b) Abbildung 1 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße B mit den Parametern $n = 10$ und $p = 0,25$.

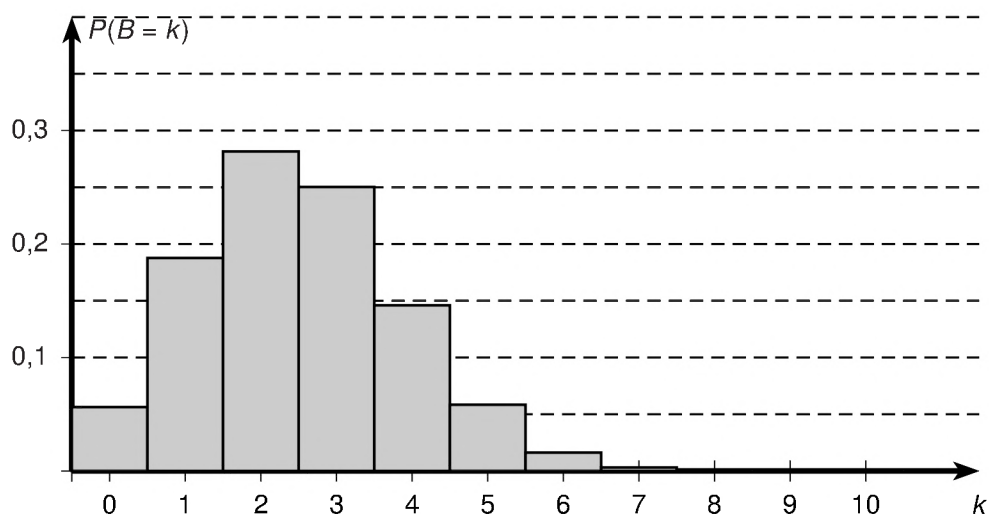


Abbildung 1

Erläutern Sie, wie man mithilfe von Abbildung 1 die Wahrscheinlichkeit dafür ermitteln kann, dass genau 6 der 10 ausgewählten Personen Treuepunkte sammeln. (2 BE)

2. 75 % der Personen aus dem Kundenkreis der Supermarktkette sammeln Treuepunkte.

Von den Personen aus dem Kundenkreis, die Treuepunkte sammeln, sind 80 % weiblich. Der Anteil der weiblichen Personen unter den Personen aus dem Kundenkreis, die keine Treuepunkte sammeln, wird mit a bezeichnet. Das abgebildete Baumdiagramm (siehe Abbildung 2) stellt den Sachverhalt dar.

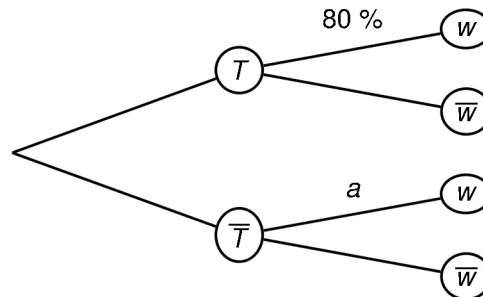


Abbildung 2

- a) Angenommen, der Kundenkreis besteht aus 500 000 Personen.

Entscheiden Sie unter dieser Annahme, ob die Anzahl der Personen, die weiblich sind und Treuepunkte sammeln, kleiner als 400 000 ist, und **begründen** Sie Ihre Entscheidung.

(3 BE)

- b) Der Anteil der nicht weiblichen Personen aus dem Kundenkreis beträgt 30 %.

Berechnen Sie den Anteil a .

(3 BE)

- c) Ein Jahr später stellt sich der Sachverhalt wie folgt dar:

- Weiterhin sammeln 75 % der Personen aus dem Kundenkreis Treuepunkte.
- Weiterhin sind von den Personen aus dem Kundenkreis, die Treuepunkte sammeln, 80 % weiblich.
- Der Wert von a ist im Vergleich zum Vorjahr gestiegen.

Beurteilen Sie folgende Aussage:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus dem Kundenkreis zufällig ausgewählte nicht weibliche Person Treuepunkte sammelt, ist größer als vor einem Jahr.

(3 BE)

3. Die Verteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit den Parametern n und p kann durch eine Normalverteilung angenähert werden, wenn $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$ gilt.

Es sei X eine binomialverteilte Zufallsgröße mit $n = 100$ und $p = 0,2$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es mindestens 16 und höchstens 18 Treffer gibt, soll sowohl über die Binomialverteilung wie auch näherungsweise über eine Normalverteilung bestimmt werden.

- a) **Bestätigen** Sie zunächst, dass die Voraussetzung für eine näherungsweise Berechnung durch eine Normalverteilung erfüllt ist.

Weisen Sie rechnerisch **nach**, dass die mit der Normalverteilung ermittelte Wahrscheinlichkeit

$$P_N(16 \leq X \leq 18)$$

von der mit der Binomialverteilung ermittelten Wahrscheinlichkeit

$$P_B(16 \leq X \leq 18)$$

um ca. 36 % abweicht.

(4 BE)

- b) Die Abbildung 3 zeigt den Graphen der Normalverteilung.

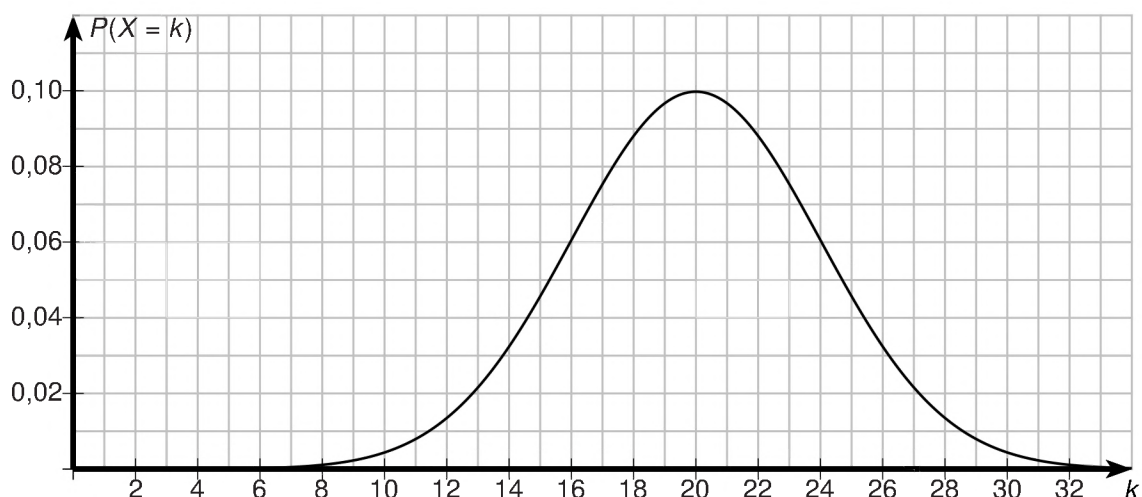


Abbildung 3

Zeichnen Sie die graphische Darstellung der Wahrscheinlichkeiten $P_B(X = k)$ der Binomialverteilung für $k \in \{16, 17, 18\}$ möglichst genau in die Abbildung 3 **ein**.

Erläutern Sie anhand der Abbildung 3 und der von Ihnen ergänzten Zeichnung, warum die Berechnung der Wahrscheinlichkeit mit der Normalverteilung durch $P_N(15,5 \leq X \leq 18,5)$ korrigiert werden müsste.

(3 BE)



Hamburg

Behörde für Schule,
Familie und Berufsbildung

Schriftliche Abiturprüfung Schuljahr 2025/2026

MMS Mathematik auf erhöhtem Anforderungsniveau an allgemeinbildenden gymnasialen Oberstufen

Haupttermin
Mittwoch, 6. Mai 2026, 9:00 Uhr

Unterlagen für die Lehrkräfte
Wahlschwerpunkt Lineare Algebra

Diese Unterlagen sind nicht für die Prüflinge bestimmt.

Diese Unterlagen enthalten:

1. Allgemeines
 2. Rückmeldebogen für die Zweiddurchsicht
 3. Hinweise zu den Aufgaben
 4. Hinweise zum Korrekturverfahren
 5. Bewertung und Erwartungshorizont
-

1. Allgemeines¹

- Weisen Sie bitte die Prüflinge auf die allgemeinen Arbeitshinweise hin.
- Die Arbeitszeit einschließlich der Auswahlzeit beträgt insgesamt **330 Minuten**.
- Eine gesonderte Lese- oder Auswahlzeit wird nicht gewährt.
- Hilfsmittel:
 - Modulares Mathematiksystem (MMS).
Das modulare Mathematiksystem muss sich im Auslieferungszustand, ggf. aktualisiert durch Updates des Betriebssystems, befinden. Dies wird in der Regel durch ein RESET erreicht. Bei Systemen, bei denen eine Nachinstallation von speziellen Stochastikprogrammen des Herstellers nötig war, müssen diese nach dem RESET erneut installiert sein.
 - zugelassene Formelsammlung,
 - Rechtschreibwörterbuch

¹ Entsprechend der "Richtlinie über die Gewährung von Erleichterungen für neu zugewanderte Schülerinnen, Schüler und Prüflinge bei Sprachschwierigkeiten in der deutschen Sprache" (MBISchul Nr. 08, 7. Oktober 2016, S. 60) werden für die betroffenen Prüflinge die folgenden Erleichterungen gewährt:

- Die Bearbeitungszeit wird um 30 Minuten auf **360 Minuten** erhöht.
- Ein nicht-elektronisches Wörterbuch Deutsch – Herkunftssprache / Herkunftssprache – Deutsch wird bereitgestellt.

2. Rückmeldebogen für die Zweiddurchsicht

Bitte umgehend ausfüllen und

- a) an die Schule senden, die die externe Zweiddurchsicht übernimmt,
oder ggf.
- b) an die Kollegin/den Kollegen geben, die/der die interne Zweiddurchsicht übernimmt.

Information für die Zweiddurchsicht

Fach:

MMS Mathematik

auf **erhöhtem Anforderungsniveau**

Kurs-Nummer: _____

Bearbeitet wurden die folgenden Aufgaben:

Aufgaben-Nr.		Anzahl	
I.5.1	von		Prüflingen
I.5.2	von		Prüflingen
I.5.3	von		Prüflingen
I.5.4	von		Prüflingen
I.5.5	von		Prüflingen
I.5.6	von		Prüflingen
II.1	von		Prüflingen
II.2	von		Prüflingen

Der gewählte Wahlschwerpunkt in der Aufgabe III: ☒ Lineare Algebra
☐ Analytische Geometrie

3. Hinweise zu den Aufgaben

Die Lehrkraft

- erhält fünf Aufgaben:
 - **Prüfungsteil A:** Aufgabe I (hilfsmittelfreier Teil),
 - **Prüfungsteil B:** Aufgaben II.1 (Analysis 1), II.2 (Analysis 2), III (Lineare Algebra) und IV (Stochastik).
- reicht alle Aufgaben an die Prüflinge weiter.

Die Prüflinge

- bearbeiten in Aufgabe I die Unteraufgaben **I.1, I.2, I.3 und I.4** verpflichtend und wählen zusätzlich **zwei** Unteraufgaben aus **I.5.1, I.5.2, I.5.3, I.5.4, I.5.5 und I.5.6** aus. Insgesamt sind also **sechs Unteraufgaben** von Aufgabe I zu bearbeiten.
- bearbeiten die Aufgabe **I** (Prüfungsteil A) ohne Unterstützung durch Formelsammlung und MMS-System in **höchstens 110 Minuten**.
- entscheiden jeweils selbst über den Zeitpunkt, zu dem sie die Bearbeitung zum Prüfungsteil A abgeben und die Hilfsmittel erhalten. Dieser Zeitpunkt muss innerhalb der ersten **110 min** nach Prüfungsbeginn liegen.
- wählen in **Prüfungsteil B** eine der Aufgaben **II.1** und **II.2** zur Bearbeitung aus.
- bearbeiten in **Prüfungsteil B** die Aufgaben **II.1** oder **II.2**, **III** und **IV**, also **drei** Aufgaben in der restlichen Arbeitszeit.

4. Hinweise zum Korrekturverfahren

- Die Korrekturen werden gemäß der "Richtlinie für die Aufgabenstellung und Bewertung der Leistungen in der Abiturprüfung" (Abiturrichtlinie) in der geltenden Fassung vorgenommen.
- Die für das Fach zuständige Lehrkraft begutachtet die Arbeiten unter Beachtung zentraler Bewertungsvorgaben und unter Kennzeichnung ihrer Vorzüge und Mängel, der richtigen Lösungen und der Fehler und bewertet jede Arbeit mit einer Punktzahl (siehe Erstkorrekturbogen). Entwürfe können ergänzend zur Bewertung herangezogen werden.
- Jede Arbeit wird sodann von der zweiten Fachlehrkraft durchgesehen, die sich entweder (auf dem Erstkorrekturbogen) der Bewertung durch die für das Fach zuständige Lehrkraft anschließt oder (auf dem Zweidurchsichtbogen) ein ergänzendes Gutachten mit Bewertung anfertigt.
- Die oder der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses legt die endgültige Punktzahl fest. Beträgt die Differenz der im Erstgutachten und im ergänzenden Gutachten erteilten Punktzahlen nicht mehr als drei Punkte, bildet sie oder er den Mittelwert beider Punktzahlen; eine gebrochene Zahl wird zur nächsten vollen Punktzahl aufgerundet. Beträgt die Differenz der im Erstgutachten und im ergänzenden Gutachten erteilten Punktzahlen mehr als drei Punkte, legt die oder der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses die endgültige Punktzahl in Auseinandersetzung mit den erstellten Gutachten entsprechend dem Erfordernis der Einheitlichkeit und Vergleichbarkeit der Bewertung der Prüfungsleistungen fest und begründet die Entscheidung auf dem Formular "Festsetzung der Note bei einer Differenz der im Erstgutachten und im ergänzenden Gutachten erteilten Punktzahlen von mehr als drei Notenpunkten".
- Die Bewertungsbögen sind als Download zu finden auf der Plattform Prüfungen (vormals HERA) in LMS.

5. Bewertung und Erwartungshorizont

I. Hinweise zur Bewertung

Prüfungsteil A (hilfsmittelfreier Teil): 30 Bewertungseinheiten (BE)

Prüfungsteil B: 70 BE (3 komplexe Aufgaben, Aufgabe II.1 oder II.2 mit 30 BE, Aufgabe III mit 20 BE und Aufgabe IV mit 20 BE)

Insgesamt sind 100 BE erreichbar.

Es dürfen auch halbe Bewertungseinheiten vergeben werden.

Bei der Festlegung von Notenpunkten gilt die folgende Tabelle.

Noten- punkte	mindestens zu erreichender Anteil an den insgesamt zu erreichenden Bewertungseinheiten	erreichte Bewertung- seinheiten
15	95 %	95–100
14	90 %	90–94,5
13	85 %	85–89,5
12	80 %	80–84,5
11	75 %	75–79,5
10	70 %	70–74,5
9	65 %	65–69,5
8	60 %	60–64,5

Noten- punkte	mindestens zu erreichender Anteil an den insgesamt zu erreichenden Bewertungseinheiten	erreichte Bewertung- seinheiten
7	55 %	55–59,5
6	50 %	50–54,5
5	45 %	45–49,5
4	40 %	40–44,5
3	33 %	33–39,5
2	27 %	27–32,5
1	20 %	20–26,5
0	0 %	0–19,5

Schwerwiegende und gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem Abzug von bis zu zwei Notenpunkten in einfacher Wertung. Mangelhafte Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen oder unzureichende oder falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text sind als fachliche Fehler zu werten. Ein Abzug für Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit soll nicht erfolgen, wenn diese bereits Gegenstand der fachspezifischen Bewertungsvorgaben sind.

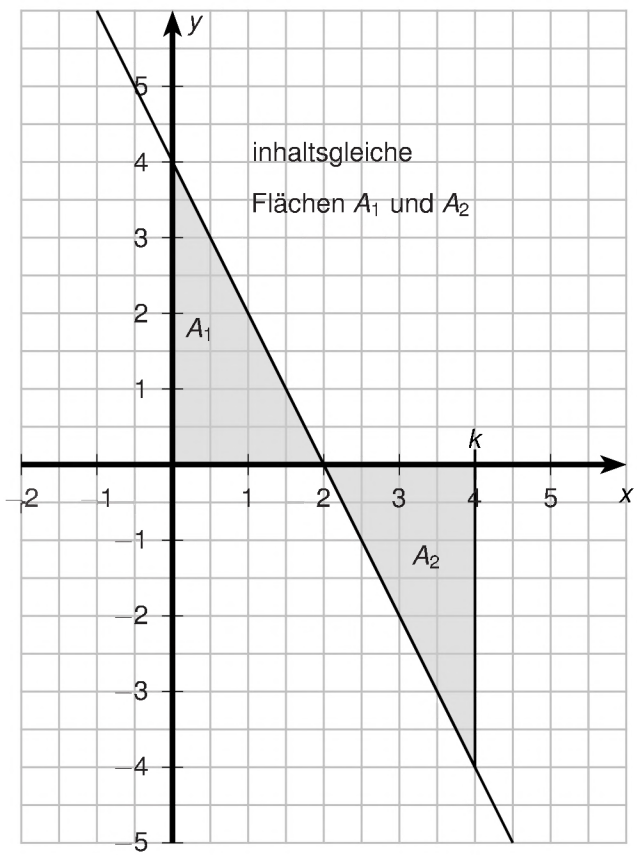
II. Erwartungshorizont

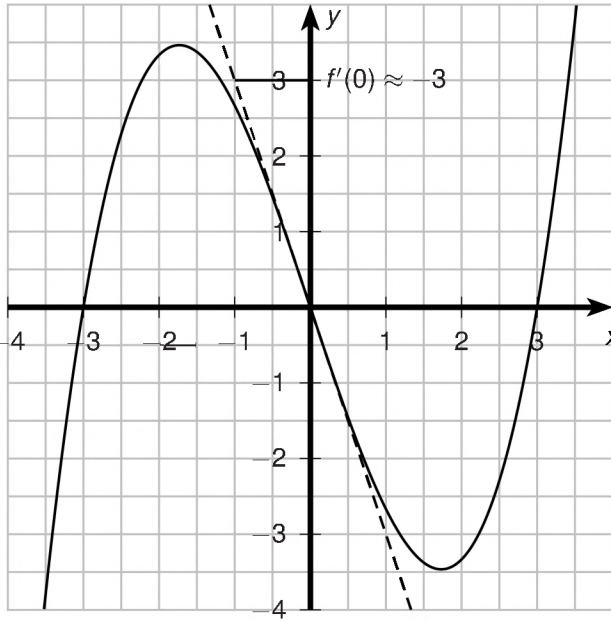
Bei den auf den folgenden Seiten dargestellten erwarteten Schülerleistungen handelt es sich um Lösungsskizzen. Oft sind aber Lösungsvarianten möglich, die in der Skizze nur zum Teil beschrieben werden konnten. Grundsätzlich gilt deshalb, dass alle Varianten, die zu richtigen Lösungen führen, mit voller Punktzahl bewertet werden, unabhängig davon, ob die gewählte Variante in der Lösungsskizze aufgeführt ist oder nicht.

Kursiv gedruckte Passagen sind Hinweise an die korrigierenden Lehrkräfte. Sie sind nicht Bestandteile der erwarteten Schülerleistung.

Bei der Bearbeitung des Prüfungsteils B müssen die Schülerinnen und Schüler die Lösungswege sorgfältig dokumentieren.

Aufgabe I: Hilfsmittelfreier Prüfungsteil

	Lösungsskizze	BE
I.1 Analysis		
a)	Der Graph von f kann aus dem Graphen von g durch Spiegelung an der y -Achse erzeugt werden.	1
b)	$2e^{k \cdot x} = 2e^{-k \cdot x} \Leftrightarrow x = 0$ $f'(x) = 2k \cdot e^{k \cdot x}$ $f'(0) = \tan(45^\circ) \Leftrightarrow 2k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$	4
I.2 Analysis		
a)	 inhaltsgleiche Flächen A_1 und A_2	2
b)	alle Stammfunktionen von g : $G_c(x) = -x^2 + 4x + c$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ größter Funktionswert von G_c : $G_c(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + c = 4 + c$ gesuchte Stammfunktionen: G_c mit $c < -4$	3

	Lösungsskizze	BE
I.3 Lineare Algebra		
a)	Im Übergangsdiagramm ist die Beschriftung der Pfeile zwischen A und C vertauscht.	1
b)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1,2 & 0 \\ 0 & 0 & 2r \\ 0,6r & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2r & 0 & 0 \\ 0 & 1,2r & 0 \\ 0 & 0 & 1,2r \end{pmatrix}$ Mit $\vec{v}_0 \neq \vec{0}$ gilt: $\vec{v}_3 = \vec{v}_0 \Leftrightarrow 1,2r \cdot \vec{v}_0 = \vec{v}_0 \Leftrightarrow r = \frac{5}{6}$	4
I.4 Stochastik		
a)	$\binom{36}{27} \cdot 0,5^{27} \cdot 0,5^9$	1
b)	$\mu = 36 \cdot 0,5 = 18; \sigma = \sqrt{18 \cdot 0,5} = 3$ $P(\mu - 0,5 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 0,5 \cdot \sigma) = P(17 \leq X \leq 19) \approx 0,13 + 2 \cdot 0,125 = 0,38$	4
I.5.1 Analysis		
a)	In der Wertemenge von f ist die Zahl -3 , aber nicht die Zahl 3 enthalten.	1
b)	Wertemenge von h : $]-3; 7]$	4
I.5.2 Analysis		
	$h'_a(x) = f'(x) + a$ $h'_a(0) = 0 \Leftrightarrow a = -f'(0)$  Damit gilt $a = 3$.	5

	Lösungsskizze	BE
I.5.3 Lineare Algebra		
a)	Betrachtet man die zweite Komponente der beiden Vektoren $A \cdot \vec{v}_a$ und $4 \cdot \vec{v}_a$, so folgt $4a = 4$ und damit $a = 1$.	2
b)	$b \cdot \vec{v}_a = A \cdot (c \cdot \vec{v}_a) = c \cdot (A \cdot \vec{v}_a) = c \cdot (4 \cdot \vec{v}_a) = 4c \cdot \vec{v}_a$ Da $\vec{v}_a$ nicht der Nullvektor ist, folgt $b = 4c$.	3
I.5.4 Lineare Algebra		
a)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	1
b)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{5} & b \\ c & \frac{1}{3}\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{5} & c \\ b & \frac{1}{3}\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \frac{5}{9} + b^2 = 1 \wedge \frac{1}{3}\sqrt{5} \cdot b + \frac{1}{3}\sqrt{5} \cdot c = 0 \wedge c^2 + \frac{5}{9} = 1$ $\Leftrightarrow b = \frac{2}{3} \wedge c = -\frac{2}{3} \vee b = -\frac{2}{3} \wedge c = \frac{2}{3}$ Die Aussage ist wahr.	4
I.5.5 Stochastik		
a)	Bei einer Runde wird mit Würfel A mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ die größere Zahl erzielt. Bei zwei Runden wird mit Würfel A daher mit einer Wahrscheinlichkeit von $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ beide Male die größere Zahl erzielt.	3
b)	$v = 24; w = 4$	2
I.5.6 Stochastik		
a)	Es wird höchstens eine Kugel mit der Zahl b entnommen.	1
b)	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot 2a + 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot 17 + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot (17 - a) = 16 \Leftrightarrow 2a + 4 \cdot 17 = 5 \cdot 16 \Leftrightarrow a = 6$ Somit ist $b = 11$.	4
Insgesamt (Bei Bearbeitung zweier der Aufgaben I.5.1, I.5.2, I.5.3, I.5.4, I.5.5 oder I.5.6)		30

Standardbezug zur Aufgabe „Hilfsmittelfreier Prüfungsteil“

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen							Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
I.1 a)	1		I	II		II				1	
b)	4			II			I		2	2	
I.2 a)	2	I				I	I		2		
b)	3	II	I	II			II			3	
I.3 a)	1	I			I	I			1		
b)	4	II		I			II		1	3	
I.4 a)	1						I		1		
b)	4	II		I		II	I		1	3	
I.5.1 a)	1	II		II						1	
b)	4	III	II	III		II				1	3
I.5.2	5		II	III		II	I		1	1	3
I.5.3 a)	2	II		I			I		1	1	
b)	3	II	II	III			III				3
I.5.4 a)	1	I	I	I		I			1		
b)	4	III	II	II			III			1	3
I.5.5 a)	3	II	II	III	II		II			2	1
b)	2		II	III	II	III	III				2
I.5.6 a)	1		II	I	II					1	
b)	4			III	III		II			1	3

Bei Bearbeitung der Aufgabe I.5.1 oder I.5.5 und I.5.2 oder I.5.3 oder I.5.4 oder I.5.6 erhält man die folgenden Bewertungseinheiten:

Anforderungsbereich I (4 - 10)	Anzahl der Bewertungseinheiten im Anforderungsbereich II (12 - 18)	Anforderungsbereich III (6 - 8)
9	15	6

Bei Bearbeitung der Aufgabe I.5.1 und I.5.5 erhält man die folgenden Bewertungseinheiten:

Anforderungsbereich I (4 - 10)	Anzahl der Bewertungseinheiten im Anforderungsbereich II (12 - 18)	Anforderungsbereich III (6 - 8)
8	16	6

Bei Bearbeitung der Aufgabe I.5.2 und I.5.3 oder I.5.4 oder I.5.6 erhält man die folgenden Bewertungseinheiten:

Anforderungsbereich I (4 - 10)	Anzahl der Bewertungseinheiten im Anforderungsbereich II (12 - 18)	Anforderungsbereich III (6 - 8)
10	14	6

Aufgabe II.1: Analysis 1

	Lösungsskizze	BE
a)	$\frac{60}{a} \cdot x \cdot (x - a)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee (x - a)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = a$ $f'_a(0) = 60a$ $f'_a(a) = 0$	4
b)	$\int_0^a f_a(x) dx = 10 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{2}$	3
c)	$f''_a(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}a$ $\frac{2}{3}a = f_a(\frac{2}{3}a) \Leftrightarrow a = \frac{3}{20}$	4
d)	$s_x = \frac{10}{11}, s_y = \frac{11}{10}$ Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ werden als die Grundseiten der Dreiecke ABC bzw. $A'B'C'$ betrachtet. Die zugehörigen Höhen sind die y -Koordinaten y_C und $y_{C'}$ der Punkte C bzw. C' . Wegen $ \overline{A'B'} = s_x \cdot \overline{AB} $ und $y_{C'} = s_y \cdot y_C$ folgt aus $s_x \cdot s_y = 1$, dass die Aussage wahr ist.	5
e)	Im Modell entspricht $x = 11$ dem Zeitpunkt 20:00 Uhr. Für $x \geq 11$ ist $g(x) = 0$ und damit die Eingangsrate gemäß dem Modell gleich null.	2
f)	Für $0 \leq x \leq 11$ gilt: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{3} \vee x = 11$ $g(\frac{11}{3}) = \frac{9 \cdot 680}{9}; g(11) = 0$ Um 12:40 Uhr ist die Eingangsrate mit etwa $1\,076 \frac{1}{h}$ am größten.	4
g)	Der Inhalt der Fläche, die der Graph von g und die x -Achse einschließen, entspricht der Anzahl aller Gäste, die am betrachteten Tag das Strandbad betreten. Der Inhalt der Fläche, die der Graph von h und die x -Achse einschließen, entspricht der Anzahl aller Gäste, die am betrachteten Tag das Strandbad verlassen. Die Gleichheit der Inhalte der Flächen I und III ist somit gleichbedeutend mit der Tatsache, dass am betrachteten Tag ebenso viele Gäste das Strandbad betreten wie verlassen.	4
h)	Im Bereich $2 \leq x \leq 11$ ist x_S wegen $D'(x) = g(x) - h(x)$ die einzige Nullstelle der Ableitungsfunktion D' von D . Da es sich um eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von plus nach minus handelt, nimmt die Funktion D an dieser Stelle ihr Maximum an. Dieses Maximum entspricht im Modell der größten Anzahl der am betrachteten Tag sich gleichzeitig im Strandbad befindenden Gäste.	4
	Insgesamt	30

Standardbezug zur Aufgabe „Analysis 1“

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen							Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
a)	4	I		I			I		X		
b)	3			II			I			X	
c)	4	II	II	II			II			X	
d)	5	III	III	III		II	II				X
e)	2	I	I		I				X		
f)	4		II		II		I			X	
g)	4	II	II		II	I				X	
h)	4	III	II	II	III		II				X

Anforderungsbereich I (6 - 8)	Anzahl der Bewertungseinheiten im Anforderungsbereich II (13 - 16)	Anforderungsbereich III (8 - 9)
6	15	9

Aufgabe II.2: Analysis 2

	Lösungsskizze	BE
1.a)	Es ist $f'(x) = 1,4 \cdot e^{-0,5(x+2)} + 1,4(x+2) \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5(x+2)}$ $= (1,4 - 0,7x - 1,4) \cdot e^{-0,5(x+2)}$ $= -0,7x \cdot e^{-0,5(x+2)}$	2
b)	$f(0) \approx 1,03$ Dies entspricht einer Höhe von 10,3 m. $\frac{10,3}{10} = 1,03$ Der Deich übersteigt die geforderte Höhe um ca. 3 %.	2
c)	$\frac{f(7)-f(0)}{7-0} \approx \frac{0,14-1,03}{7} \approx -0,127$ Die mittlere Steigung beträgt ca. -12,7 %.	3
d)	$f''(x) = (0,35x - 0,7) \cdot e^{-0,5(x+2)} = 0 \Leftrightarrow 0,35x - 0,7 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ $f'(2) \approx -0,1895$ $\tan^{-1}(-0,1895) \approx -10,7^\circ$ Der Deich erfüllt die Vorgabe.	3
e)	$100 \cdot 100 \cdot \left(\int_0^{2,4} (f(x) - q(x)) dx + \int_{2,4}^7 f(x) dx \right)$	3
f)	Es muss gelten: $g(0) = f(0)$ und $g'(0) = f'(0)$ $g(0) = 0,515 \cdot \cos(0) + 0,515 = 1,03 \approx f(0)$ $g'(x) = 0,515 \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot (-\sin(\frac{1}{4}\pi \cdot x))$. Da $\sin(0) = 0$, folgt $g'(0) = 0 = f'(0)$. Also sind die Bedingungen erfüllt.	3
g)	$g(x) - q(x) = 0,3$ Die Lösungen lauten $x_1 \approx -2,05$; $x_2 \approx -0,57$; $x_3 \approx 0,57$; $x_4 \approx 2,05$ Relevant im Bereich $-4 \leq x \leq 0$ sind die Lösungen x_1 und x_2. Durch Berechnung einer Ausdehnung zwischen x_1 und x_2, z. B. $g(-1) - q(-1) < 0,3$, wird entschieden, dass der gesuchte Bereich zwischen x_1 und x_2 liegt. Der Bereich, in dem die Ausdehnung der Kleischicht in y-Richtung maximal 3 m beträgt, lautet somit $-2,05 \leq x \leq -0,57$.	3

	Lösungsskizze	BE
2.a)	Für $k > 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{a,k}(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{a,k}(x) = 0$ Für große positive x wächst $f_{a,k}(x)$ unbegrenzt, für große negative x nähert sich $f_{a,k}(x)$ der Null. Für $k < 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{a,k}(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{a,k}(x) = -\infty$ Für große positive x geht $f_{a,k}(x)$ gegen Null, für große negative x fällt $f_{a,k}(x)$ gegen $-\infty$.	3
b)	$f'_{a,k}(x) = (a + akx)e^{kx} \Leftrightarrow f'_{a,k}(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{k}$ Extrempunkt: $(-\frac{1}{k} -\frac{a}{k}e^{-1})$ $f''_{a,k}(x) = (2ak + ak^2x) \cdot e^{kx}$ $f''_{a,k}(-\frac{1}{k}) = ak \cdot e^{-1}$ Für $k < 0$ liegt in $x = -\frac{1}{k}$ Hochpunkt. Für $k > 0$ liegt in $x = -\frac{1}{k}$ Tiefpunkt.	6
c)	$t(-\frac{1}{k}) = a \cdot e^{-1} \cdot (-\frac{1}{k}) = -\frac{a}{k} \cdot e^{-1}$	2
	Insgesamt	30

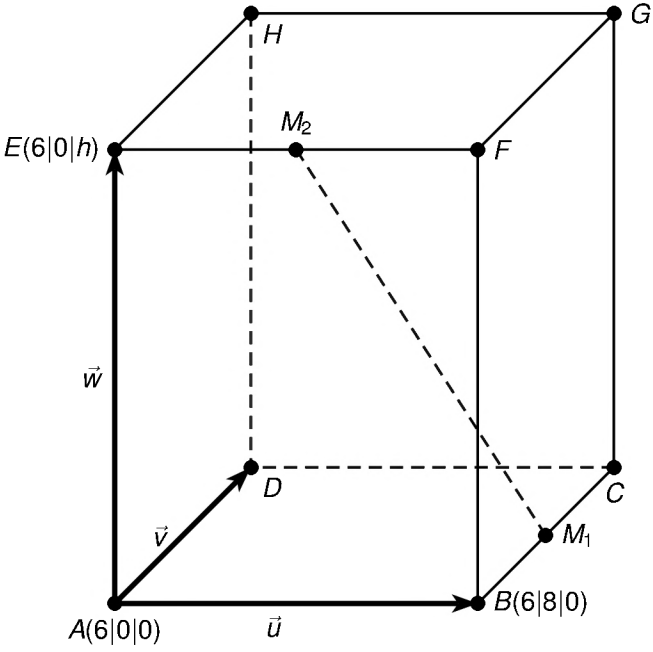
Standardbezug zur Aufgabe „Analysis 2“

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen							Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
1. a)	2	I					I		X		
b)	2	I			I		I		X		
c)	3	I		I	I		I		X		
d)	3		II	II	II		I			X	
e)	3		II		I	II				X	
f)	3	II	II				II			X	
g)	3			II	II		II			X	
2. a)	3	II	II		II					X	
b)	6			III			II				X
c)	2		II	III			II				X

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I (6 - 8)	Anforderungsbereich II (13 - 16)	Anforderungsbereich III (8 - 9)
7	15	8

Aufgabe III: Lineare Algebra

	Lösungsskizze	BE
1.a)	$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}; r_1 = 5 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 65$	3
b)	Mithilfe der Matrix N kann aus gegebenen Anzahlen der Mengeneinheiten der beiden Endprodukte die hierfür benötigten Anzahlen der Mengeneinheiten der drei Rohstoffe berechnet werden.	1
c)	Aus $N \cdot \begin{pmatrix} e \\ 2e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 98e \\ 103e \\ 118e \end{pmatrix}$ und $118e \leq 1298$ folgt $e \leq 11$. Es können maximal 22 Mengeneinheiten gefertigt werden.	4
d)	K_0 : aktuelle Anschaffungskosten (in Geldeinheiten) für die Rohstoffe zur Fertigung einer Mengeneinheit von E_1 K_5 : Anschaffungskosten (in Geldeinheiten) für die Rohstoffe zur Fertigung einer Mengeneinheit von E_1 nach 5 Jahren x : Faktor des jährlichen Anstiegs der Anschaffungskosten für den Rohstoff R_3 $K_0 = 32 \cdot 5 + 35 \cdot 6 + 40 \cdot 7$ $K_5 = (32 \cdot 5 + 35 \cdot 6) \cdot 1,03^5 + 40 \cdot 7 \cdot x^5$ Mit $K_5 \leq 1,2 \cdot K_0$ folgt $x \leq x_1$ mit $x_1 \approx 1,0463$. Der maximale Wert des beschriebenen prozentualen Anstiegs beträgt etwa 4,6 % pro Jahr.	5

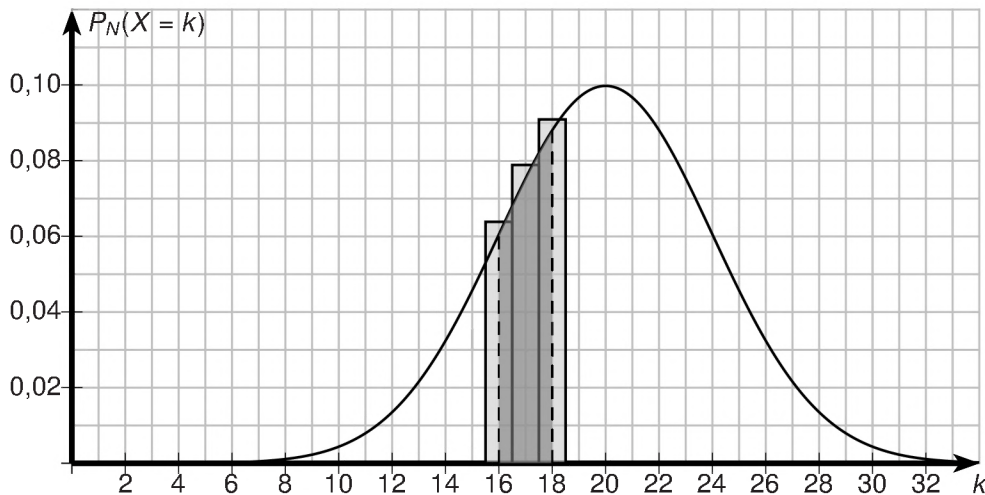
	Lösungsskizze	BE
2.a)	 $r = s = -\frac{1}{2}; t = 1$	3
b)	Mit $\vec{AG} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ h \end{pmatrix}$ und $\vec{CE} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ h \end{pmatrix}$ gilt: $\vec{AG} \circ \vec{CE} = 0 \Leftrightarrow h = 10$ Inhalt der Oberfläche des Quaders: $2 \cdot (6 \cdot 8 + 6 \cdot 10 + 8 \cdot 10) = 376$	4
	Insgesamt	20

Standardbezug zur Aufgabe „Lineare Algebra“

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen							Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
1. a)	3			II	I		I			X	
b)	1		I		I				X		
c)	4	II		II	II		II			X	
d)	5		II	III	III	I	II				X
2. a)	3			I		I	I		X		
b)	4	II		II		II	I			X	

Anforderungsbereich I (4 - 5)	Anzahl der Bewertungseinheiten im Anforderungsbereich II (9 - 11)	Anforderungsbereich III (5 - 6)
4	11	5

Aufgabe IV: Stochastik

	Lösungsskizze	BE
1.a)	$P_{0,75}^{10}(A < 8) \approx 47,4\%$	2
b)	Wegen $P_{0,75}^{10}(A = 6) = P_{0,25}^{10}(B = 4)$ entspricht in der Abbildung 1 der Wert für $k = 4$ der gesuchten Wahrscheinlichkeit.	2
2.a)	$0,75 \cdot 0,8 = 0,6 < \frac{400\,000}{500\,000}$ Die Anzahl der Personen, die weiblich sind und Treuepunkte sammeln, ist kleiner als 400 000.	3
b)	$0,75 \cdot 0,2 + 0,25 \cdot (1 - a) = 0,3 \Leftrightarrow 0,4 - 0,25a = 0,3 \Leftrightarrow a = 0,4$	3
c)	Die Aussage ist wahr. Mit dem Term $\frac{0,75 \cdot 0,2}{0,75 \cdot 0,2 + 0,25 \cdot (1 - a)}$ kann die beschriebene Wahrscheinlichkeit berechnet werden. Wenn der Wert von a steigt, dann nimmt der Wert des Nenners ab und der Wert des Quotienten zu.	3
3.a)	$100 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 16 > 9$ Es ist $P_B(16 \leq X \leq 18) \approx 0,2336$. Für die Normalverteilung ist $\mu = 100 \cdot 0,2 = 20$ und $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8} = 4$. Damit erhält man $P_N(16 \leq X \leq 18) \approx 0,1499$. Die Abweichung beträgt $1 - \frac{0,1499}{0,2336} \approx 0,358 \approx 36\%$	4
b)	 Die Fläche der eingezeichneten Rechtecke entspricht der Wahrscheinlichkeit, die mit der Binomialverteilung berechnet wird. Diese Fläche approximiert den Wert der Binomialverteilung schlecht. Durch die Stetigkeitskorrektur kommt man dem richtigen Wert näher.	3
	Insgesamt	20

Standardbezug zur Aufgabe „Stochastik“

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen							Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	I	II	III
1. a)	2		I		I		I		X		
b)	2	II	II	II		II				X	
2. a)	3		I	I	I				X		
b)	3			I	II	II	II			X	
c)	3	III	III	II	II		II				X
3. a)	4			II			II			X	
b)	3		III		III						X

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I (4 - 5)	Anforderungsbereich II (9 - 11)	Anforderungsbereich III (5 - 6)
5	9	6